

# 微分算子与子波构造

袁 晓<sup>1,2,3</sup>, 陈向东<sup>2,4</sup>, 李齐良<sup>4</sup>, 张蜀平<sup>2</sup>, 蒋亚东<sup>2</sup>, 虞厥邦<sup>5</sup>

(1. 四川大学电子信息学院, 四川成都 610064; 2. 电子科技大学传感技术工程四川省重点实验室, 四川成都 610054; 3. 空军工程大学航空电子工程系, 陕西西安 710038; 4. 四川大学物理学院, 四川成都 610064; 5. 电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

**摘 要:** 将传统意义下的整数阶微分运算拓展到非整数阶微分情形, 直接仿照整数阶微分在时域的极限定义形式是很困难的. 本文从分析微分运算的频域形式着手, 将微分算子分解成幅度算子和相位算子, 并将其与子波变换特征进行比照研究, 从而解决了非整数阶微分的拓展问题, 同时也得到了微分运算与子波变换的内在联系, 为非整数阶微分计算提供了一种逼近方式. 文中提出了幅度算子、广义 Hilbert 变换等新概念并重点探讨了基于非整数阶微分运算的子波构造及其局域化特征等问题.

**关键词:** 非整数阶微分; 局域化; 广义 Hilbert 变换; 子波变换

**中图分类号:** TN941 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 05-0769-05

## Differential Operator and the Construction of Wavelet

YUAN Xiao<sup>1,2,3</sup>, CHEN Xiang-dong<sup>2</sup>, LI Qi-liang<sup>4</sup>, ZHANG Shu-ping<sup>2</sup>, JIANG Ya-dong<sup>2</sup>, YU Jue-bang<sup>5</sup>

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ, Chengdu, Sichuan 610064, China;

2. Sichuan Province Key Lab for Transducer Tech. & Eng., UESTC, Chengdu, Sichuan 610054, China;

3. Dept. of Aeronautical Electronic Eng., Air Force Eng. Univ., Xi'an, Shaanxi 710038, China;

4. Physics College, Sichuan Univ., Chengdu, Sichuan 610064, China;

5. College of Electronic Eng., UESTC, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract:** This paper investigates the topic of non-integral order differentiation. Following directly the limit definition of the classical integral order differentiation in the time-domain, it is difficult to expand the classical differential operation from the integral order case to the non-integral order case. Based on the expression of differential operation in the frequency domain, and wedding it to the wavelet transform, the non-integral order differential problem was solved in this paper. Meanwhile the inherent law between the non-integral order differential operation and the wavelet transform was discovered, and an approximate approach for computing the non-integral order differentiation was given. In this paper we introduce some new concepts, such as the magnitude operator and the generalized Hilbert transform etc, thereby study emphatically the construction and the localization characteristics of wavelet which is based on the non-integral order differentiation of a low-pass function.

**Key words:** non-integral order differentiation; localization; generalized hilbert transform; wavelet transform

## 1 引言

现代信号分析与处理的本质可以用一个“非”字高度概括: 研究和分析非线性、非因果、非最小相位系统、非高斯、非平稳、非整数维(分形)信号和非白色的加性噪声, 以及分数(非整数阶)傅里叶变换等<sup>[1,2]</sup>. 描述、分析和处理这些“非”问题, 就必须创造和采用新的手段, 或者拓展原有的分析技术方法.

微分运算是一种基本的数学运算, 在信号分析与处理等领域得到广泛应用, 特别在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的作用, 比如电力故障检测、电分析化学信号处理、子波构造等方面更是不可缺少的数学运算工具<sup>[3-8]</sup>. 我们常用的微分运算, 微分方程等使用的都是整数阶, 一阶微分、二阶

微分... 然而许多事物、自然现象, 例如许多“非”问题和现象是难以用整数阶微分方程进行描述和刻画的. 为了顺应“非”问题现象的研究和理解, 将整数阶微分运算拓展到非整数阶情形, 无论在理论上, 还是在应用中, 都很有意义和必要的.

本文主要目的有三: 1. 探讨非整数阶微分运算问题及其技术实现; 2. 非整数阶微分运算的一个简单应用——子波构造; 3. 微分运算与子波变换的内在联系.

## 2 整数阶微分算子与卷积运算

对于任一能量型函数(或信号) $f(t) \in L^2(R)$ , 设其 Fourier 变换为  $f(\omega) = \int_R f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$ . 根据 Plancherel 定理有  $f(\omega) \in L^2(R)$ .

收稿日期: 2001-04-28; 修回日期: 2001-11-09

基金项目: 国防科技重点实验室基金试点项目 (No. 2000JS11. 4. 3. D20213)

函数  $f(t)$  的一阶微分

$$Df(t) = f'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

的 Fourier 变换为

$$D(f)(\omega) = (i\omega) f(\omega) = \mathcal{A}(\omega) f(\omega) \quad (2)$$

可见微分算子  $D$  是符号为

$$\mathcal{A}(\omega) = i|\omega| = i \text{sgn}(\omega)$$

( $L^2$  上) 的乘子(算子).  $\mathcal{A}$  是一个纯虚函数, 由复数的指数表示法, 可改写成

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A}(\omega) \exp[i\phi(\omega)] \\ \mathcal{A}(\omega) = |\omega|, \phi(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\text{sgn}(\cdot)$  是符号函数,  $\mathcal{A}(\omega)$  和  $\phi(\omega)$  分别是  $d$  的幅度谱和相位谱.

对  $\mathcal{A}(\omega)$  进行 Fourier 反变换得乘子  $d$  的时域表示形式

$$d(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{t} a(t) \quad (4)$$

式中  $a(t)$  是  $\mathcal{A}(\omega)$  的 Fourier 反变换<sup>[9]</sup>:

$$\mathcal{A}(\omega) \leftrightarrow a(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cdot e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{|t|^2} \quad (5)$$

由式(4)、(5)得

$$Df(t) = f(t) * d(t) = -f(t) * \left[ a(t) * \frac{1}{t} \right] \quad (6)$$

写成算子形式为

$$Df(t) = -A[Hf(t)] = -AHf(t) = -Af(t) \quad (7)$$

式中  $A$  是符号为  $\mathcal{A}(\omega) = |\omega|$  的(奇异)乘子(算子):

$$Af(t) = f(t) * [a(t)] = -\frac{1}{|t-x|^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (8)$$

$H$  是 Hilbert 变换 (HT) 算子<sup>[9,10]</sup>:

$$f(t) = Hf(t) = f(t) * \frac{1}{t} = \frac{1}{t-x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (9)$$

显然算子  $A$  和  $H$  是可交换的, 即有

$$D = -AH = -HA$$

式(3)表明, (一阶)微分运算不但改变原函数  $f$  的幅度, 而且也改变其相位. 对幅度来说, 微分运算的作用是: 提升放大高频成分(这就是微分运算对高频奇异信息的敏感特性), 抑制减小低频成分(这就是微分运算对低频慢变信息的衰减特性), 而对直流完全不起作用, 这些特点正好与子波变换的特性(对高频奇异信息的“显微”能力、对低频慢变信息的“概括”能力和对直流完全不起作用)十分相似的. 对相位来说, 微分运算的作用就是进行一次 HT 再反号. 式(6)~(9)表明, 在时域, (一阶)微分运算是对函数或信号  $f(t)$  的一种局域化处理, 这正好与子波变换的局域化处理要求是一致的. 上述对比分析表明, 微分运算和子波变换具有某种必然的内在联系. 因此微分运算广泛用于子波构造就不足为奇了, 例如 Mexican 帽子波就是高斯函数的二阶微分.

假设  $f(t)$  的  $k(k=1, 2, \dots)$  阶微分

$$f^{(k)}(t) = D_k f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$$

存在, 则其 Fourier 变换为

$$(D_k f)(\omega) = (i\omega)^k f(\omega) = \mathcal{A}_k(\omega) f(\omega) \quad (10)$$

$k$  阶微分乘子函数  $\mathcal{A}_k(\omega)$  的指数形式为

$$\begin{cases} \mathcal{A}_k(\omega) = \mathcal{A}_k(\omega) \exp[i\phi_k(\omega)] \\ \mathcal{A}_k(\omega) = |\omega|^k, \phi_k(\omega) = \frac{k\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad (11)$$

容易验证算子  $A_k = A^k$  和  $H_k H^k$  是可交换的

$$D_k = D^k = (-1)^k A^k H^k = (-1)^k H^k A^k = (-1)^k H_k A_k$$

从以上分析得知: 可微函数  $f$  的微分运算可转化分解成对  $f$  幅度的卷积运算(对应算子  $A_k = A^k$ )和对相位的高阶 HT(对应算子  $H_k = H^k$ ). 从时域角度来看, 算子  $A_k$  和  $H_k$  的作用均是对  $f$  进行时间局域化处理. 随着阶数  $k$  的增高, 这种时间局域化处理越来越强烈.

### 3 非整数阶微分与广义 Hilbert 变换

前面讨论的是函数  $f$  的(正)整数阶微分运算  $f^{(k)}(t)$  及其算子  $D_k$ , 即  $k \in \mathbb{Z}^+$ . 能否将整数阶微分运算拓展到非整数情形呢? 即对于一个  $m$  阶可微能量型实函数(或信号)

$$f: |Df(t)| = |f^{(k)}(t)| < \infty, k=1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{Z}^+ \quad (12)$$

存在(正)实数  $(0, m]$  有算子  $D$  使得条件:

$$\text{有界性 } |Df(t)| = |f^{(\alpha)}(t)| < \infty, \alpha \in (0, m];$$

$$\text{连续性 } \lim_{\alpha \rightarrow 2} D_\alpha f(t) = D_2 f(t) \quad \alpha \in (0, m];$$

$$\text{实质性 } Df(t) \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, m]$$

成立.

显然当  $\alpha$  为正整数, 即  $\alpha = k, k=1, 2, \dots, m$  时, 就应当得到通常意义上的整数阶微分运算  $f^{(k)}(t)$  及其算子  $D_k$ .

根据上节关于整数阶微分运算的讨论, 上述拓展在频域是容易做到的:

$$(Df)(\omega) = (i\omega)^\alpha f(\omega) = \mathcal{A}(\omega) f(\omega) \quad (13)$$

式中乘子  $\mathcal{A}(\omega)$  在频域的指数形式为

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\omega) = \mathcal{A}(\omega) e^{i\phi(\omega)} = \mathcal{A}(\omega) \cdot \mathcal{P}(\omega) \\ \mathcal{A}(\omega) = |\omega|^\alpha, \phi(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (0, m] \quad (14)$$

乘子  $d$  的时域形式为

$$d(t) = a(t) * p(t)$$

其中(参见《数学手册》<sup>[9:p568]</sup>)

$$a(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{2} \frac{(\omega+1)}{|\omega|^{1+\alpha}} \quad (\alpha = 0, 2, 4, \dots, -1, -3, \dots) \quad (15)$$

(式中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数<sup>[9,11]</sup>),

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega t} d\omega = \cos \frac{\omega}{2} \cdot \Gamma(\omega) - \sin \frac{\omega}{2} \cdot \frac{1}{t} \quad (16)$$

从而式(13)在时域等价形式为

$$Df(t) = f(t) * d(t) = f(t) * a(t) * p(t) \quad (17)$$

写成算子形式为

$$Df(t) = A P f(t) = P A f(t) \quad (18)$$

算子  $A$  仅对  $f$  的幅度起作用

$$A : Af(t) = f(t) * a(t)$$

$$= - \frac{(-+1)}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f(x)}{|x-t|+1} dx, \quad [0, m] \quad (19)$$

而算子  $P$  仅改变  $f$  的相位,且有:

$$\begin{aligned} Pf(t) &= f(t) * p(t) = f(t) * [\cos \frac{\pi}{2} \cdot (t) - \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t}] \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \cdot f(t) - \sin \frac{\pi}{2} \cdot Hf(t) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} f(t) - \sin \frac{\pi}{2} f(t) \end{aligned}$$

因此相位算子  $P$  可分解成两部分:

$$P = \cos \frac{\pi}{2} I - \sin \frac{\pi}{2} H, \quad \mathbb{R}^+ \quad (20)$$

其中  $I: f(t) = f(t)$  是恒等算子,  $H$  为式(9)定义的 HT 算子, 满足实值性条件.

显然,幅度算子  $A$  和相位算子  $P$  均是实算子,从而保证非整数阶微分算子  $D$  也是实算子,满足实质性条件.

根据式(19)和(20)容易验证:幅度算子  $A$  和相位算子  $P$  关于变量  $\mathbb{R}^+$  是连续变化的,从而使得非整数阶微分算子  $D$  关于变量  $\mathbb{R}^+$  也是连续变化的,从而保证条件,也即连续性成立.

广义 Hilbert 变换 对于整数(高)阶 Hilbert(变换)算子  $H_k = H^k, k \in \mathbb{N}$  中的  $k$ , 如果换成实数  $\nu \in [0, \infty)$ , 得到的算子  $H = H^\nu$  对应的乘子函数是

$$h(\omega) = [-i \operatorname{sgn}(\omega)]^\nu = e^{-i \frac{\pi}{2} \nu \operatorname{sgn}(\omega)} = \cos \frac{\pi}{2} \nu - i \sin \frac{\pi}{2} \nu \operatorname{sgn}(\omega) \quad (21)$$

因此算子  $H$  可分解成如下形式

$$H = \cos \frac{\pi}{2} \nu I + \sin \frac{\pi}{2} \nu H, \quad [0, \infty) \quad (22)$$

当实数  $\nu$  取正整数时,就得到通常意义下的 HT 算子,并且算子  $H$  关于  $\nu$  是连续的,因此本文称式(22)所定义的算子  $H$  为广义 HT 算子,相应的变换

$$\begin{aligned} Hf(t) &= \cos \frac{\pi}{2} \nu f(t) + \sin \frac{\pi}{2} \nu Hf(t) \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \nu f(t) + \sin \frac{\pi}{2} \nu f(t), \quad [0, \infty) \end{aligned} \quad (23)$$

称为函数  $f$  的广义 Hilbert 变换.

由式(14)和(21)知  $h^*(\omega) = h^*(\omega)$ , 因此本文称由式(20)所给定的相位算子  $P$  为广义共轭 Hilbert 算子,所确定的变换为函数  $f$  的广义共轭 HT. 其实,算子  $H$  和算子  $P$  是互为共轭的,它们都是仅对函数的相位施行变换,因此可统称它们为广义 Hilbert(变换)算子.

函数  $\cos \omega t$  的广义 HT 和广义共轭 HT 换分别是

$$H \cos \omega t = \cos \frac{\pi}{2} \nu \cdot \cos \omega t + \sin \frac{\pi}{2} \nu \cdot \sin \omega t = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2} \nu),$$

$$P \cos \omega t = \cos \frac{\pi}{2} \nu \cos \omega t - \sin \frac{\pi}{2} \nu \sin \omega t = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} \nu)$$

对于高斯函数

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leftrightarrow \mathcal{F}\{g(t)\} = \exp(-\frac{\omega^2}{2})$$

一阶 HT 为

$$g(t) = Hg(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \exp(-\frac{t^2}{2}) \sin(\omega t) d\omega$$

显然  $g(t)$  是连续有界的奇函数,因此高斯函数的任意阶广义 HT 和广义共轭 HT 为

$$\begin{cases} Hg(t) = \cos(\frac{\pi}{2} \nu) \cdot g(t) + \sin(\frac{\pi}{2} \nu) \cdot Hg(t) \\ Pg(t) = \cos(\frac{\pi}{2} \nu) \cdot g(t) - \sin(\frac{\pi}{2} \nu) \cdot Hg(t) \end{cases} \quad \mathbb{R}$$

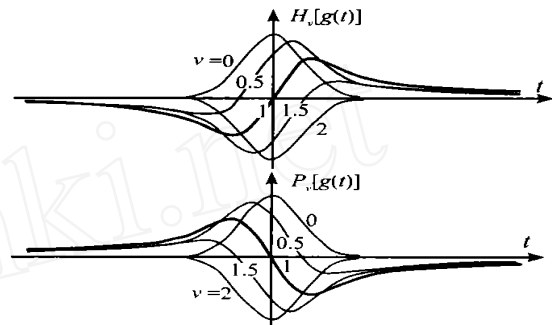


图 1 高斯函数  $g(t)$  的广义 Hilbert 变换:  $H_\nu[g(t)]$  和  $P_\nu[g(t)]$

#### 4 基于微分运算的子波构造

以上论述表明,对于任意一个可微的低通函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R}) \leftrightarrow \Phi(\omega)$  进行微分运算  $\phi^{(\nu)}(t) = D^\nu[\phi(t)]$ , 均能得到一个满足允许性条件的(母)子波.

$$(t) = \phi^{(\nu)}(t) \leftrightarrow \Phi(\omega) = (i \omega)^\nu \Phi(\omega) \quad \mathbb{R}^+ \quad (24)$$

如果函数  $\phi(t)$  是实函数,则  $\phi^{(\nu)}(t)$  也是实函数.

在时域求解  $\phi^{(\nu)}(t) = D^\nu[\phi(t)] = A P^\nu[\phi(t)]$  需要计算奇异积分,通常这是比较困难的.然而对于具有良好时间局域化特征,特别是紧支的低通函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  (甚至对于一个不光滑的函数),其频谱  $\Phi(\omega)$  却是容易得到的,对  $\Phi(\omega) = (i \omega)^\nu \Phi(\omega)$  进行 Fourier 反变换就能容易求出  $\phi^{(\nu)}(t)$ .

例如对于最简单的 Haar(尺度)函数  $\phi_H(t) = \operatorname{rect}(t) \leftrightarrow \Phi_H(\omega) = \operatorname{sinc}(\omega/2)$ , 则有

$$\begin{aligned} \phi_H^{(\nu)}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (i \omega)^\nu \operatorname{sinc}(\omega/2) \\ &\quad \exp(i \omega t) d\omega, \quad [0, 1] \end{aligned} \quad (25)$$

显然当  $\nu=1$  时,  $\phi_H^{(1)}(t) = \phi_H^{(1)}(t) = (t+0.5) - (t-0.5)$ . Harr 函数的非整数阶微分  $\phi_H^{(\nu)}(t): \nu=0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1$  曲线如图 2 所示.

更进一步假设  $\phi(t)$  为实偶函数,则其频谱  $\Phi(\omega)$  也是实偶函数,故有

$$\begin{aligned} (t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (i \omega)^\nu \Phi(\omega) \exp(i \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{0} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega)| \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} \nu) d\omega \end{aligned} \quad (26)$$

因此,只要低通函数  $\phi$  在频域也具有良好的(频率)局域化特征,使得  $|\Phi(\omega)| \in L^1(\mathbb{R}^+)$  可积,就能用式(26)求解出低通函数  $\phi$  的非整数阶微分  $\phi^{(\nu)}(t)$ , 相应地得到一个(母)子波  $\phi^{(\nu)}(t)$ .

Shannon 尺度函数  $\phi_S(t) = \operatorname{sinc}(t) \leftrightarrow \Phi_S(\omega) = \operatorname{rect}(\omega/2)$

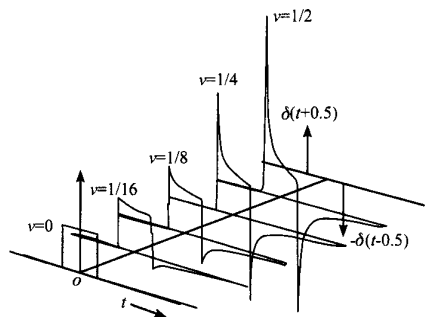


图2 Haar 尺度函数的非整数阶微分曲线图.  $0 \leq \nu \leq 1$

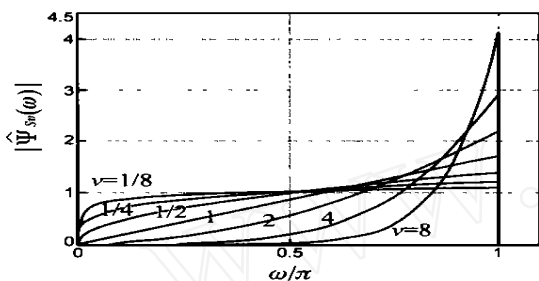


图3 子波  $\psi_s$  的幅谱变化图

的时间局域化特征很差,但其频率局域化特征极端的好,  $\phi_s(\cdot)$  是紧支的.在时域,  $\phi_s(t)$  充分光滑,它存在任意阶微分:

$$\phi_s^{(\nu)}(t) \leftrightarrow \phi_s^{(\nu)}(\omega) = (i\omega)^\nu \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (0, \infty)$$

随着阶数  $\nu$  的增高,  $\phi_s^{(\nu)}$  的能量急剧增大,因此我们进行能量归一化处理,取相应的子波  $\psi_s$  的频谱函数为  $\hat{\psi}_s(\omega) = E^{-1/2} \phi_s^{(\nu)}(\omega)$ , 其中  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_s^{(\nu)}(\omega)|^2 d\omega = (2\nu + 1)^{-1/2}$

是能量归一化因子,则有

$$\hat{\psi}_s(\omega) = \sqrt{2\nu + 1} \left(\frac{i\omega}{2}\right)^\nu \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (27)$$

当  $\nu = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$  时,  $|\hat{\psi}_s(\omega)|, \omega \in [0, \infty)$  曲线如图3所示.从该图中看出,随着(微分)阶数  $\nu$  的增高,  $\psi_s$  的频率局域化特征越来越好,但其时间局域化特征却越来越差(这一点似乎与微分运算的时间局域化处理相矛盾).由式(27)有

$$\begin{cases} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \hat{\psi}_s(\omega) = [\text{sgn}(\omega)] \{ \delta(\omega + \frac{1}{2}) + \delta(\omega - \frac{1}{2}) \} \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} \psi_s(t) = P[\cos(\frac{t}{2})] = \cos(\frac{t}{2}) \end{cases}$$

Haar 函数  $\phi_H$  和 Shannon 尺度函数  $\phi_S$  是两个互相对立的极端情形,它们本身及其微分的时-频局域化特征都极端的差.为了用微分运算由低通函数  $\phi$  构造具有良好时间、频率局域化特征子波  $\psi_s$ ,  $\phi$  也应当具有良好的时间、频率局域化特征.一种好的选择是取低通光滑函数  $\phi$  为具有最佳时-频局域化特征的高斯谱函数<sup>[12,13]</sup>.取  $\phi(\omega) = \exp(-\omega^2/2)$ , 则有

$$\phi^{(\nu)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\nu + 1}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \cos(\frac{t}{2} + \frac{\nu\pi}{2})$$

当  $\nu = 0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1$  时,  $\phi^{(\nu)}(t)$  曲线如图4所示.从该图中看出,当微分阶数较小时:  $0 < \nu \leq 1/2$ ,  $\phi^{(\nu)}(t)$  似“孤波”:有一个急速变化的高耸“正峰头”,然后拖着一个缓慢衰

减的细长“负尾巴”,但整个时域波形的积分为零,即  $\phi^{(\nu)}(t)$  具有波动性,而当阶数  $\nu$  超过  $1/2$  后,随着  $\nu$  的增大,这个“尾巴”迅速缩短并逐渐消失.再观察分析图2,也看到同样的现象.这似乎与一些神经脉冲波形很相似.

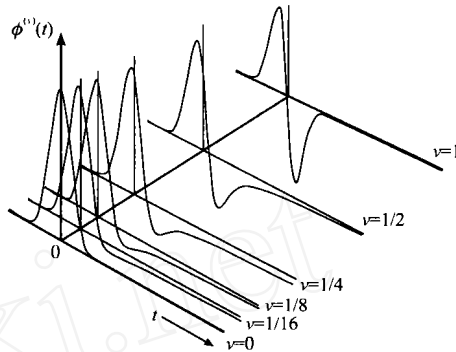


图4 高斯函数的非整数阶微分曲线图

对  $\phi^{(\nu)}$  进行能量归一化处理,取子波  $\psi_s$  的频谱函数为

$$\hat{\psi}_s(\omega) = [2\nu + 1]^{-1/2} \phi^{(\nu)}(\omega) \quad (28)$$

并代入式(26)中则有

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\nu + 1}} \exp(-\frac{t^2}{2}) \cos(\frac{t}{2} + \frac{\nu\pi}{2}) \quad (29)$$

由式(28)、(29)可得子波  $\psi_s$  的频率局域化特征(即功率谱  $\frac{1}{2} |\hat{\psi}_s(\omega)|^2$  的标准偏差<sup>[12,13]</sup>  $B(\nu)$ 、时间局域化特征(即时域能量  $|\psi_s(t)|^2$  的标准偏差)  $T(\nu)$  和时-频局域化特征  $\mu(\nu) = B(\nu) \cdot T(\nu)$ . 基于高斯函数微分运算能构造出许多具有良好局域化特征子波<sup>[15]</sup>.

**微分运算与子波变换** 给定一光滑实偶函数  $\phi(t) \leftrightarrow \hat{\phi}(\omega)$ , 满足低通条件  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ , 则应用微分运算可构造出能量规范子波

$$\psi_s(t) = E^{-1/2}(\nu) D[\phi(t)] \leftrightarrow \hat{\psi}_s(\omega) = E^{-1/2}(\nu) (i\omega)^\nu \hat{\phi}(\omega) \quad (30)$$

(式中能量归一化因子  $E(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} |D[\phi(t)]|^2 dt$ ). 对于任意实信号  $f(t)$ , 在尺度  $s > 0$  下的子波变换定义为

$$Wf(s, t) = f(t) * \psi_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) \cdot \frac{1}{s} \psi_s\left(\frac{t - \tau}{s}\right) d\tau \quad (31)$$

其中  $\psi_s(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t}{s}\right)$ .

由式(30)、(31)和卷积性质<sup>[9,10,14]</sup>立即可得

$$D[f(t) * \phi_s(t)] = \frac{E(\nu) Wf(s, t)}{s} \quad (32)$$

式中  $\phi_s(t) = \frac{1}{s} \phi\left(\frac{t}{s}\right)$ , 根据实分析理论可知  $\phi_s$  是一个恒等逼近核, 即有<sup>[9,14]</sup>

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * \phi_s(t) dt = f(t)$$

从而得到

$$D[f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{E(-) Wf(s, t)}{s} \quad (33)$$

这就是微分运算与子波变换之间的内在联系。

## 5 结束语

将通常意义下的整数阶微分运算拓展到非整数阶微分情形,直接仿照整数阶微分在时域的极限定义形式(一阶微分定义见式(1))是很困难的,并且也不知从何入手。本文从分析微分运算的频域形式着手,将微分算子  $D$  分解成幅度算子  $A$  和相位算子  $P$ (即共轭 HT 算子),从而容易地得到了非整数阶微分运算的时域卷积形式(见式(17)),这具有重要的理论意义,它表明非整数阶微分确实存在并有可能计算出来。文中我们研究了三个典型函数:Haar(尺度)函数、Shannon 尺度函数和高斯函数  $g$  的非整数阶微分情况,其结果表明本文提出的拓展方法是合理和可行的。

式(33)是本文研究的一个重要结果,它不但给出了微分运算与子波变换的内在联系,而且同时也给出了非整数阶微分在时域的(一种)极限定义形式。式(32)则给出了非整数阶微分运算的一种简单可行的逼近技术,同时它也表明可以将微分技术与子波变换融合在一起。

关于非整数阶微分的研究,本文的工作仅仅是一个初步尝试,还有许多问题需要进一步探讨(比如非整数阶微分的几何解释、物理意义、快速数值算法以及模拟电路实现等课题),也许还有更好、更先进的拓展方法等待着人们去发现和研究。

祝贺虞厥邦教授七十华诞。

## 参考文献:

- [ 1 ] 张贤达. 时间序列分析 [M]. 北京:清华大学出版社,1996.
- [ 2 ] 张贤达. 现代信号处理 [M]. 北京:清华大学出版社,1995.
- [ 3 ] 袁晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用 [D]. 成都:电子科技大学,1998.
- [ 4 ] S Mallat. Zero-crossings of a wavelet transform [J]. IEEE Trans on IT 1991,37(4):1019-1033.
- [ 5 ] S Mallat, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans on IT 1992,38(2):617-643.
- [ 6 ] Alexander, C Footim, Gao J B. Wavelet transform: A method for derivative calculation in analytical chemistry [J]. Anal Chem,1998,70:5222-5229.
- [ 7 ] 王晓茹. 基于小波变换和神经网络的高压电网故障信号处理与保护研究 [D]. 成都:西南交通大学,1998.
- [ 8 ] 袁晓. 一类新的复解析子波构造及其性质研究 [J]. 电子学报,2000,28(4):123-126.
- [ 9 ] 《数学手册》编写组. 数学手册 [M]. 北京:高等教育出版社,1979.
- [ 10 ] 潘文杰. 傅里叶分析及其应用 [M]. 北京:北京大学出版社,2000.
- [ 11 ] 谭琳. 函数札记 [M]. 杭州:杭州大学出版社,1997.
- [ 12 ] 袁晓,虞厥邦,陈向东,扬家德. 超高斯谱函数及其时-频局域化特征 [J]. 电子学报,2001,29(1):80-83.
- [ 13 ] L. 科恩. 时-频分析:理论与应用 [M]. 西安:西安交通大学出版社,1998.
- [ 14 ] 陆善镇,王昆扬. 实分析 [M]. 北京:北京师范大学出版社,1997.
- [ 15 ] 陈向东,袁晓,李齐良,等. 高斯函数、子波及其局域化特征 [J]. 信号处理,2001,17(增刊):66-69.

## 作者简介:

袁 晓 男,1964 年出生于四川中江,工学博士,1998 年毕业于电子科技大学光电子技术系,学术研究方向为电路与系统、神经网络、语音信号分析处理和子波理论与应用等,目前主要研究子波的构造与性质、快速算法与应用,已发表论文三十余篇。

陈向东 男,1968 年生于重庆市,副教授,工学博士,1998 年毕业于电子科技大学微电子与固体电子学专业,主要从事新型传感器及其传感信息信号处理等领域的研究,已发表论文二十余篇。

李齐良 1965 年生,副研究员,现在四川大学作博士后研究工作,主研方向为光通讯、电磁工程等,已公开发表科学学术论文十余篇。

张蜀平 工程硕士,主研方向为光电信息处理。

蒋亚东 教授,主要从事新型传感器及其传感信息信号处理等领域的研究。

虞厥邦 1932 年生,1955 年毕业于华南工学院,现为电子科技大学教授、电路与系统学科博士生导师,学术研究方向为非线性动力学、神经网络及计算智能、混沌信号处理、混沌通信系统、电路设计自动化等,在国内外学术刊物及会议公开发表和宣读论文约 180 余篇。